N-竜王問題の解の個数について

宮田 大輔　　　永岡 淳一
千葉商科大学 商経学部

キーワード：*N*-竜王，基本解，数え上げ

1　はじめに

与えられた条件の下でチェス盤に駒を配置するような問題は古くから研究されている。例えば，$N \times N$ の大きさのチェス盤に N 個の王妃（クイーン）を互いに取られないように配置する *N*-王妃問題は有名である。*N*-王妃問題では，$N \leqq 27$ についてバリエーション解(回転と鏡像を考慮しない解)と基本解（回転と鏡像によって一致する配置を同一視した解）の個数が知られている[1]。また，クイーンをキングやビショップに変えた場合など様々な変種の問題が存在する[4]。

本研究では，日本古来のボードゲームである将棋の竜王について同様の問題を考え，$N \leqq 30$ について基本解の個数を求めたので報告する。

2　*N*-竜王問題

将棋における竜王は図 1 のように垂直方向と水平方向には何マスでも動くことができ，左上，右上，左下，右下方向に 1 マスだけ動くことができる。

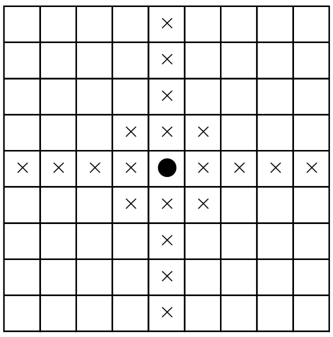

図 1：竜王の動き（×が移動可能な位置）

$N \times N$ の大きさの将棋盤に，互いに取られないように N 個の竜王を置くような配置が何通りあるかという問題を *N*-竜王問題と呼ぶことにする。

2.1　バリエーション解

回転や鏡像を考慮しない解をバリエーション解と呼ぶ。例えば 5-竜王問題のバリエーション解は図 2 に示すように全部で 14 個存在する。

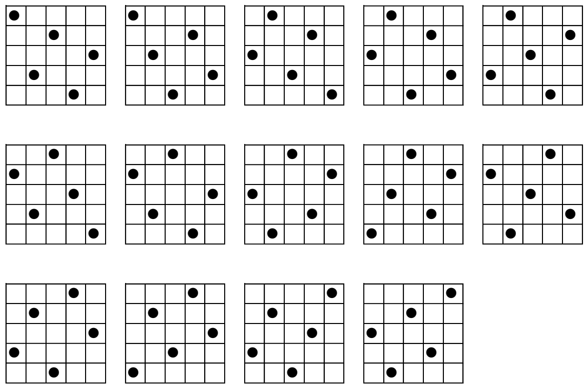

図 2：5-竜王問題のバリエーション解

N-竜王のバリエーション解の個数を $V(N)$で表す。$V(N)$は，連続する数が現れない $1, 2, \ldots, N$ の順列の総数と一致するが, Abramson らによって次の漸化式が与えられている[2, 5]。

$$\begin{aligned} V(N) = {} & (N-1)V(N-1) \\ & -(N-2)V(N-2) \\ & -(N-5)V(N-3) \\ & +(N-3)V(N-4) \end{aligned} \tag{1}$$

ただし，$V(0)=1$，$V(1)=0$，$V(2)=0$，$V(3)=2$ である。$N \leqq 30$ について $V(N)$の値を表 1 に示す。

2.2　基本解

回転や鏡像によって一致するバリエーション解を同一視した解を基本解と呼ぶ。例えば 5-竜王問題の基本解は図3に示すように全部で3個存在し，これらの基本解に対して回転あるいは反転(鏡像)

を施すことですべてのバリエーション解が得られる。

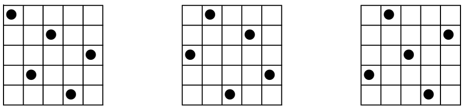

図 3：5-竜王問題の基本解

N-竜王の基本解の個数を $F(N)$で表す。また，各バリエーション解について，対角線について対称な解の個数を $D(N)$，90°回転について対称な解の個数を $R(N)$，盤面中心について点対称な解の個数を $P(N)$とする。対角線対称な解，90°回転対称な解，点対称な解の例を図 4,5,6 に示す。

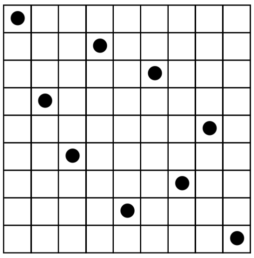

図 4：対角線対称な解の例

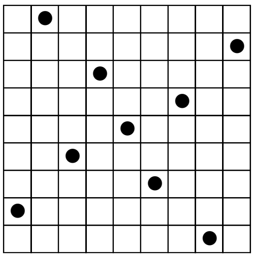

図 5：90°回転対称な解の例

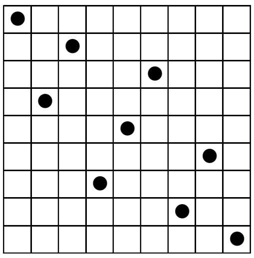

図 6：点対称な解の例

Cauchy–Frobenius の定理（例えば[6]）によれば，$F(N)$は $D(N)$, $R(N)$, $V(N)$, $P(N)$を用いて，次のように表すことができる。

$$F(N) = \frac{1}{8}\big(2D(N) + 2R(N) + V(N) + P(N)\big) \quad (2)$$

また，$P(N)$については次の漸化式が知られている[3]。

$$\begin{aligned} P(2N) = (2N+1)&P(2N-2) \\ -(2N-5)&P(2N-4) \\ -(2N-5)&P(2N-6) \\ +(2N-6)&P(2N-8) \quad (3) \\ P(2N+1) = P&(2N) \end{aligned}$$

ただし，$P(0)$=1, $P(2)$=0, $P(4)$=2, $P(6)$=14 である。N≦30 について $P(N)$の値を表 1 に示す。

3　基本解の個数

$V(N)$と $P(N)$については式(1), (3)によって効率的に計算可能であるから，$D(N)$と $R(N)$が求まれば，式(2)を用いて $F(N)$を求めることができる。

3.1　対角線対称な解の個数

竜王がまだ置かれていない行のうち，最も上の行から順に竜王を 1 つ（さらに対称的な位置にも 1 つ）置くこと考える。このとき，各列の状態を次のような長さ m の文字列 S で表現する。

$$S = "s_1 s_2 \cdots s_m"$$

ここでs_i $(i = 1, \ldots, m)$は'o','x','-'のいずれかの文字で，'o'は竜王がまだ置かれていない列で右上にも左上にも竜王が置かれていないような列，'x'は竜王がまだ置かれていない列であるが右上か左上に竜王が配置されている列，'-'はすでに配置済みの列を表す。また S の先頭と末尾は"-"ではなく，途中で連続する'-'は出現しないものとする。例えば，図 7 のように 9×9 の将棋盤に上から 2 行目までに 2 個（さらに対称的な位置にも 2 個）の竜王を置いた場合の状態文字列はS = "oox-x-o"である。

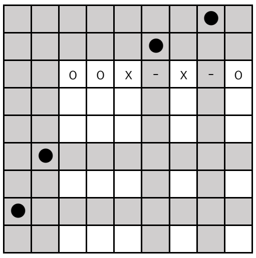

図 7：状態文字列"oox-x-o"

いま $d(S)$を状態 S から対角線対称に竜王を配置する配置の数とする。$d(S)$は次式を満たす。

$$d("") = 1$$
$$d(S) = \sum_{p} d\big(\delta_D(S,p)\big) \tag{4}$$

ただし，和は $p\neq 2$ かつ s_p="o"となるような p を渡る。また，状態遷移関数$\delta_D(S,p)$は，状態 S のときに位置 p に竜王を置いた場合の次の状態を表す。具体的には状態 $S = "s_1 \cdots s_m"$に対して

$t_i = "\text{-}"$,　if $s_i = "\text{-}"$ or $i = 1$ or $i = p$

$t_i = "\text{x}"$,　if $s_i \neq "\text{-}"$ and $s_2 \neq "\text{-}"$ and $i = p \pm 1$

$t_i = "\text{o}"$,　otherwise.

となるように$T = "t_1 \cdots t_m"$を作成し，T の先頭および末尾の"-"を削除し，連続する"-"を 1 つの"-"に置換したものが$\delta_D(S,p)$となる。

ここで

$$D(N) = d("\text{ooo}\cdots\text{o}")$$

である。ただし"ooo…o"は長さ N の"o"である。

3.2　90°回転対称な解の個数

N=4n+2 または N=4n+3 ならば $R(N)$=0 であり，また $R(4n+1)$=R(4n)となることが容易に示せるので，ここでは N として 4 の倍数だけを考える。

いま $r(S)$を状態 S から回転対称に竜王を配置する配置の数とする。$r(S)$は次式を満たす。

$$r("") = 1$$
$$r(S) = \sum_{p} r\big(\delta_R(S,p)\big) \tag{5}$$

ただし，和は $p\neq 1, m$ かつ s_p="o"となるような p を渡る。状態遷移関数$\delta_R(S,p)$は，状態 S のときに位置 p に竜王を置いた場合の次の状態を表す。

具体的には状態 $S = "s_1 \cdots s_m"$に対して

$t_i = "\text{-}"$,　if $s_i = "\text{-}"$ or $i = 1, m, p, m+1-p$

$t_i = "\text{x}"$,　if $s_i \neq "\text{-}"$, $s_2 \neq "\text{-}"$, $i = p \pm 1, p \neq 2, m-1$

$t_i = "\text{o}"$,　otherwise.

となるように$T = "t_1 \cdots t_m"$を作成し，T の先頭および末尾の"-"を削除し，連続する"-"を 1 つの"-"に置換したものが$\delta_R(S,p)$となる。

ここで

$$R(N) = r("\text{ooo}\cdots\text{o}")$$

である。ただし"ooo…o"は長さ N の"o"である。

4　結果

計算機を利用して，N≦30 について式(4)および式(5) から $D(N)$および $R(N)$を計算した。計算時には状態文字列をキーとしたハッシュテーブルを用意して，メモ化再帰の手法を用いた。さらに式(2)を用いて $F(N)$を計算した。その結果を表 1 に示す。

5　おわりに

N-竜王問題の基本解の個数を求めた。今回は 64bit 整数型を使ったため N≦30 の範囲について計算したが，多倍長整数を扱える処理系を利用すれば，本手法を用いて一般的なパーソナルコンピュータで N≦40 程度の計算が可能である。

参考文献

[1] "Q27 project", https://github.com/preusser/q27, 2022 年 3 月 10 日閲覧

[2] M. Abramson and W. O. J. Moser, “Permutations without rising or falling ω-sequences”, *Ann. Math. Stat.,* **38** , pp.1245-1254, 1967.

[3] G. Kirchner, Sequence A283184 in the On-line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS A283184), 2017.

[4] V. Kotesovec , *Non-attacking chess pieces 6ed.*, 2013.

[5] N. J. A. Sloane, Sequence A002464 in the On-line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS A002464), 2017.

[6] 成嶋弘,「数え上げ組合せ論入門」, 日本評論社, 1996.

表 1：$F(N)$, $D(N)$, $R(N)$, $V(N)$, $P(N)$の値

N	F(N)	D(N)	R(N)	V(N)	P(N)
1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	1	0	2	2	2
5	3	2	2	14	2
6	15	8	0	90	14
7	88	22	0	646	14
8	691	74	8	5 242	122
9	6 034	256	8	47 622	122
10	60 299	912	0	479 306	1 262
11	663 109	3 410	0	5 296 790	1 262
12	7 977 637	13 222	76	63 779 034	15 466
13	103 925 690	53 172	76	831 283 558	15 466
14	1 457 771 021	221 152	0	11 661 506 218	219 646
15	21 900 662 747	948 978	0	175 203 184 374	219 646
16	350 861 249 805	4 194 766	1 052	2 806 878 055 610	3 551 194
17	5 970 937 351 402	19 063 676	1 052	47 767 457 130 566	3 551 194
18	107 571 145 016 413	88 956 264	0	860 568 917 787 402	64 431 374
19	2 045 354 932 281 341	425 559 746	0	16 362 838 542 699 862	64 431 374
20	40 932 572 426 626 967	2 084 877 286	18 820	327 460 573 946 510 746	1 296 712 778
21	860 041 178 530 871 948	10 447 267 188	18 820	6 880 329 406 055 690 790	1 296 712 778
22	18 929 568 443 778 542 499	53 496 699 592	0	151 436 547 414 562 736 234	28 672 204 574
23	435 552 898 431 265 302 861	279 648 625 738	0	3 484 423 186 862 152 966 838	28 672 204 574
24	10 456 890 755 680 570 012 467	1 491 144 701 894	412 268	83 655 126 041 771 262 574 458	691 007 296 954
25	261 501 772 512 970 442 765 460	8 103 627 415 428	412 268	2 092 014 180 086 865 279 171 334	691 007 296 954
26	6 800 871 248 889 627 333 624 207	44 853 782 072 000	0	54 406 969 991 009 281 966 468 810	18 029 138 380 846
27	183 667 252 328 772 171 304 281 767	252 677 159 731 962	0	1 469 338 018 629 653 986 976 409 366	18 029 138 380 846
28	5 143 774 546 563 271 588 245 917 793	1 447 856 851 338 494	10 685 764	41 150 196 372 502 770 671 331 103 322	506 320 912 190 506
29	149 197 798 720 124 733 953 009 581 714	8 433 540 754 920 828	10 685 764	1 193 582 389 760 980 498 221 633 250 022	506 320 912 190 506
30	4 476 698 015 235 556 102 181 950 030 641	49 910 905 393 546 640	0	35 813 584 121 884 333 767 012 044 281 386	15 228 632 768 870 462