n-竜王問題の対称解の個数について

宮田 大輔 *　　永岡 淳一 †　　山下倫範 ‡

* 千葉商科大学　† サレジオ工業高等専門学校　‡ 立正大学

要　旨　大きさ $n \times n$ の将棋盤に，互いに取り合わないように n 個の竜王を置くような配置が何通りあるかという問題を n-竜王問題と呼び，そのような条件を満たす配置を解と呼ぶ。また，解のうち回転や鏡像によって一致するものを同一視した場合の解の個数を基本解の個数と呼ぶ。本稿では回転対称解の個数および対角線対称解の個数を表す母関数と漸化式を与える。これにより基本解の個数を求めることが可能となる。

キーワード　n-竜王問題，n-kings problem, 基本解，対称解，数え上げ

1　はじめに

与えられた条件の下でチェス盤に駒を配置するような問題は，レクリエーション数学の 1 つとして，古くから研究されている。

例えば，$n \times n$ の大きさのチェス盤に n 個の queen を互いに取られないように配置する n-queens 問題は有名である。n-queens 問題では，$n \leq 27$ についてバリエーション解（回転と鏡像を考慮しない解）と基本解（回転と鏡像によって一致する配置を同一視した解）の個数が知られている [8]。また，n-rooks 問題（将棋の飛車と同じ動き）の場合，バリエーション解の個数が $n!$ 個あることは明らかである。パズル作家として有名な Dudeny はその著書 [2] の中で n-rooks 問題の基本解の個数を決定することは難しいと述べているが，Lucas[7] や Larson[5] によって基本解の個数を求める式が与えられている。この個数はオンライン整数列大辞典（OEIS A000903[10]）に登録されている。他にも様々な変種の問題が Kotesovec の著書 [4] に詳しくまとめられている。

本稿では，日本古来のボードゲームである将棋の竜王について同様の問題を考える。筆者らは計算機実験によって $n \leq 30$ について，n-竜王問題の基本解の個数を求めた。今回，回転対称解および対角線対称解の個数を与える母関数および漸化式を得たので報告する。

2　n-竜王問題

将棋における竜王は図 1 のように垂直方向と水平方向には何マスでも動くことができ，左上，右上，左下，右下方向に 1 マスだけ動くことができる。$n \times n$ の大きさの将棋盤に，互いに取られないように n 個の竜王を置くような配置が何通りあるかという問題を n-竜王問題と呼ぶ。n-竜王問題は，チェスの king を互いに取られないように各行各列にちょうど 1 個ずつ置く問題と同値であることから，n-kings 問題と呼ばれることもある。

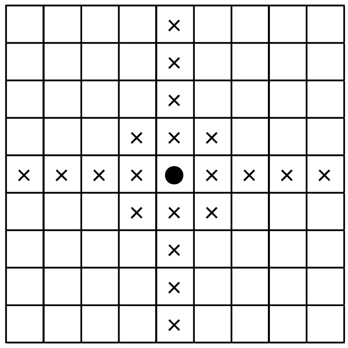

図 1: 竜王の動き（×が移動可能な位置）

2.1　バリエーション解

回転や鏡像を考慮しない解をバリエーション解と呼ぶ。例えば 5-竜王問題のバリエーション解は図 2 に示すように全部で 14 個存在する。

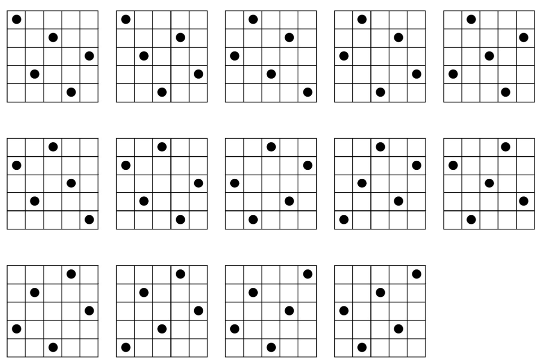

図 2: 5-竜王問題のバリエーション解

2.2　基本解

回転や鏡像によって一致するバリエーション解を同一視した解を基本解と呼ぶ。例えば 5-竜王問題の基本解は図 3 に示すように全部で 3 個存在し，これらの基本解に対して回転あるいは反転（鏡像）を施すことですべてのバリエーション解が得られる。

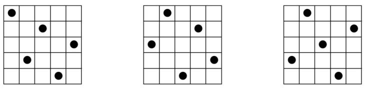

図 3: 5-竜王問題の基本解

3　基本解の個数

n-竜王問題の基本解の個数を f_n で表す。f_n は，Cauchy-Frobenius の定理（Burnside の補題という名前でも知られる。例えば Liu[6]，成嶋 [12]）を用いて，次のように表すことができる。

$$f_n = \frac{1}{8}(v_n + c_n + 2r_n + 2d_n) \tag{1}$$

ここで，v_n はバリエーション解の個数，c_n は盤面中心について点対称な解（以下，点対称解とよぶ）の個数，r_n は 90° 回転について対称な解（回転対称解）の個数，d_n は対角線について対称な解（対角線対称解）の個数を表す。

後述するように v_n と c_n については母関数および漸化式が知られている。したがって，回転対称解の個数 r_n と対角線対称解の個数 d_n が与えられれば，基本解の個数は直ちに求めることができる。

3.1　バリエーション解の個数

Abramson は，連続する数が隣り合わない順列の個数（つまりバリエーション解の個数）に関する式を与えた [1]。また，Shapiro らは簡潔な方法でその母関数を導出している [9]。次の定理は Shapiro による。

定理 A (Shapiro)
バリエーション解の個数 v_n の通常型母関数は

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k! \left(\frac{x - x^2}{1 + x}\right)^k \end{aligned}$$

である。

$V(x)$ のはじめのいくつかの項を求めると次のようになる。

$$V(x) = 1 + x + 2x^4 + 14x^5 + 90x^6 + 646x^7 + 5242x^8 + \cdots$$

定理 A から，$n \geq 4$ について，次の関係が成り立つことが示せる。

$$\begin{aligned} v_n = (n+1)v_{n-1} - (n-2)v_{n-2} \\ - (n-5)v_{n-3} + (n-3)v_{n-4} \end{aligned} \tag{2}$$

ただし，$v_0 = 1, v_1 = 1, v_2 = 0, v_3 = 0$ である。

バリエーション解の個数に関する有益な情報は，オンライン整数列大辞典（OEIS A002464[11]）からも得ることができる。

3.2　点対称解の個数

バリエーション解のうち，盤面中央を中心に 180° 回転しても配置が変わらないような解を点対称解と呼ぶ。点対称解の例を図 4 に示す。

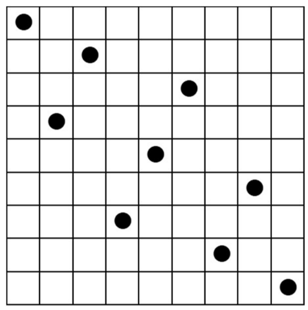

図 4: 9-竜王問題の点対称解の例

Kirchner は，点対称解の個数 c_n に関して次の定理と同等の結果を得ている [3]。

定理 B (Kirchner)
回転対称解の個数 c_n の通常型母関数は

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \frac{1 + x - x^2 - x^3}{1 + x^2} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k k! \left(\frac{x^2 - x^4}{1 + x^2}\right)^k \end{aligned}$$

である。

$C(x)$ のはじめのいくつかの項を求めると次のようになる。

$$C(x) = 1 + x + 2x^4 + 2x^5 + 14^6 + 14x^7 + 122x^8 + 122x^9 + \cdots$$

定理 B から，$n \geq 4$ について，次の関係が成り立つことが示せる。

$$c_{2n} = (2n+1)c_{2n-2} - (2n-5)c_{2n-4} - (2n-5)c_{2n-6} + (2n-6)c_{2n-8} \quad (3)$$

ただし，$c_0 = 1$, $c_2 = 0$, $c_4 = 2$, $c_6 = 14$ である。また $n \geq 0$ について $c_{2n+1} = c_{2n}$ である。

3.3 回転対称解の個数

バリエーション解のうち，盤面中央を中心に 90° 回転しても配置が変わらないよう解を回転対称解と呼ぶ。回転対称解の例を図 5 に示す。

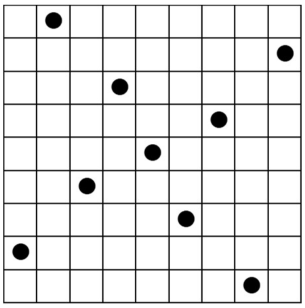

図 5: 回転対称解の例

回転対称解に関して次が成り立つ。

定理 1 回転対称解の個数 r_n の通常型母関数は

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n = (1+x)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!}\left(\frac{x^4 - x^8}{1+x^4}\right)^k$$

である。

$R(x)$ のはじめのいくつかの項を求めると次のようになる。

$$R(x) = 1+x+2x^4+2x^5+8x^8+8x^9+76x^{12}+76x^{13}+\cdots$$

また，定理 1 より，$n \geq 4$ について次の関係が成り立つことが示せる。

$$r_{4n} = (4n-1)r_{4n-4} - (4n-5)r_{4n-8} - (4n-15)r_{4n-12} + (4n-14)r_{4n-16} \quad (4)$$

ただし，$r_0 = 1$, $r_4 = 2$, $r_8 = 8$, $r_{12} = 76$ である。また $n \geq 0$ について $r_{4n+1} = r_{4n}$，$r_{4n+2} = r_{4n+3} = 0$ である。

3.4 対角線対称解の個数

バリエーション解のうち，対角線について反転しても配置が変わらないよう解を対角線対称解と呼ぶ。対角線称解の例を図 6 に示す。

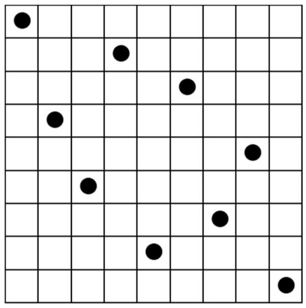

図 6: 対角線対称解の例

対角線対称解に関して次が成り立つ。

定理 2 対角線対称解の個数 d_n の通常型母関数は

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^k k!}\left(\frac{x^2 - x^4}{1+x^2}\right)^k \left(\frac{1+x+x^2+x^3}{1+2x^2+2x^3+x^4}\right)^{2k+1}$$

である。

$D(x)$ のはじめのいくつかの項を求めると次のようになる。

$$D(x) = 1 + x + 2x^5 + 8x^6 + 22x^7 + 74x^8 + 256x^9 + \cdots$$

また，定理 2 より，$n \geq 12$ について，次の関係が成り立つことが示せる。

$$\begin{aligned} d_n = {} & -d_{n-1} + nd_{n-2} + (2n-7)d_{n-3} + (n+5)d_{n-4} + 2d_{n-5} - (2n-30)d_{n-6} \\ & - (4n-38)d_{n-7} - (2n-27)d_{n-8} + 11d_{n-9} + (n-2)d_{n-10} \\ & + (2n-19)d_{n-11} + (n-11)d_{n-12} \end{aligned} \quad (5)$$

ただし，$d_0 = d_1 = 1$, $d_2 = d_3 = d_4 = 0$, $d_5 = 2$, $d_6 = 8$, $d_7 = 22$, $d_8 = 74$, $d_9 = 256$, $d_{10} = 912$, $d_{11} = 3410$ である。

4　おわりに

n-竜王問題の回転対称解および対角線対称解の個数に関して母関数と漸化式を与えた。式 (1)–(5) を用いることで，基本解の個数を求めることが可能となった。

参考文献

[1] M. Abramson and W. O. J. Moser, "Permutations without rising or falling ω-sequences", *Ann. Math. Stat.*, **38**, pp.1245–1254, 1967.

[2] H. E. Dudeney, "Solutions 295: The eight rooks" in *Amusements in Mathematics*, Thomas Nelson and Sons, London, p.214, 1917.

[3] G. Kirchner, Sequence A283184 in *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences*, `https://oeis.org/A283184`, 2017.

[4] V. Kotesovec , *Non-attacking chess pieces 6ed.*, 2013.

[5] L. C. Larson, "The number of essentially different nonattacking rook arrangement", *J. Recreat. Math.*, **7**, pp.180–181, 1974.

[6] C. L. Liu, *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1968.

[7] E. Lucas, *Téorie des Nombres*, Gauthier-villars, Paris, 1891.

[8] T. B. Preußer, "The Q27 project", `https://github.com/preusser/q27`, 2016.

[9] L. Shapiro and A. B. Stephens, "Bootstrap percolation, the Schroeder problems and the n-kings problem", *SIAM J. Discrete Math.*, **4**, pp.275–280, 1991.

[10] N. J. A. Sloane, Sequence A000903 in *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences*, `https://oeis.org/A000903`, 2003.

[11] N. J. A. Sloane, Sequence A002464 in *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences*, `https://oeis.org/A002464`, 2017.

[12] 成嶋弘,『数え上げ組合せ論入門』，日本評論社，1996.

[13] 宮田大輔, 永岡淳一，"N-竜王問題の解の個数について"，第11回国際ICT利用研究学会研究会講演論文集，pp.41–45, 2022.